

Théorème du viriel et dynamique des supernovae

Frédéric AMAUGER, Serge BOUQUET

Commissariat à l'énergie atomique, CEA/DIF/DPTA, BP 12 91680, Bruyères-le-Châtel, France

Courriel : amauger@bruyeres.cea.fr ; bouquet@bruyeres.cea.fr

(Reçu le 9 juillet 1999, accepté après révision le 17 mars 2000)

Résumé.

L'utilisation des groupes de transformation permet d'obtenir des solutions dynamiques aux équations non linéaires de l'hydrodynamique gravitationnelle. Ces solutions, combinées au théorème du viriel, permettent de généraliser la formule statique de Chandrasekhar qui relie les énergies totale et interne. Les nouvelles relations obtenues sont valides pour un effondrement, une expansion ou bien une implosion suivie d'une explosion des couches externes de l'étoile (cas d'une supernova par exemple). © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The virial theorem and the dynamics of supernovae

Abstract.

The use of the transformation groups leads to dynamical solutions of the nonlinear gravitational hydrodynamical equations. These solutions, combined with the virial theorem, generalise the Chandrasekhar's static relation between the total and the internal energies. The new relations describe a collapse, an expansion or the sequence collapse/expansion of the external layers of a star (case of a supernova, for example). © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The relation between the total energy, E , and the internal one, U , of a star is given by the Chandrasekhar equation $E = (4 - 3\gamma)U$ (Chandrasekhar, 1967), where γ is the adiabatic polytropic coefficient. This equation is only valid for static configurations. If we consider a star with exploding external layers or an imploding core (this is the case of the supernovae), it is necessary to extend the previous law with time evolving quantities.

The rescaling method introduces new variables which define a new space (rescaled space) where the time evolving configurations may become static. The global motion is absorbed by the rescaling transformation (defined by equations (8)–(10)), but no information at all about the dynamics of the supernova is lost. The transformation is applied to the hydrodynamical equations and to the virial theorem (equations (2)–(7) which lead to the equations (11) and (12)). In addition, we have introduced relations between the various energies defined in the 'physical' space and the ones given in the rescaled one (equations (13)–(15)). It becomes, therefore, possible to obtain a relation between the total energy in the physical space, and the internal and potential energies in the new one (equation (17)). This equation contains the potential energy $\hat{V}_P$ associated to the additional force which appears in the new Euler equation (equation (11)). The application of the inverse transformation to equation (17) leads to the generalisation (equation (18)) of the relation obtained by Chandrasekhar in the hydrostatic case. This new relation depends upon the generalised polytropic exponent γ' , the adiabatic polytropic exponent γ , the time, and a parameter Ω . This parameter is

Note présentée par Nicole CAPITAINÉ.

proportionnal to the Jean's frequency and it has been introduced in order to avoid a singularity at the initial time $t = 0$.

Moreover, it is also possible to take into account a pressure gradient due to the spatial density in the stars profile. This new constraint imposes that the coefficient takes the value $\gamma' = \frac{4}{3}$ and we have to use an extended rescaling transformation (*equations* (19)–(21)), containing a scaling function, $C(t)$ (which obeys the differential *equation* (23)). This is a generalisation of the first transformation (*equations* (8)–(10)). The solutions of the differential *equation* (23) describes either implosion, explosion, or finally, the sequence implosion/explosion. Consequently, we obtain the extension of the Chandrasekhar law to the time evolving inhomogeneous systems for any adiabatic polytropic exponent (*equation* (26)) whatever the global motion of the external layers is.

1. Introduction

Dans cet article, nous présentons plusieurs résultats analytiques concernant la dynamique des supernovae. Ils généralisent la relation entre l'énergie totale E , l'énergie interne U et le coefficient $\gamma = C_p/C_v$ d'une étoile :

$$E = (4 - 3\gamma)U \quad (1)$$

Cette relation, obtenue antérieurement par Chandrasekhar [1], n'est valide que dans le cas hydrostatique. Dans ce travail, nous allons obtenir des relations qui sont valables à chaque instant t et qui suivent une étoile (ou des parties de celle-ci) dans son évolution. On peut ainsi décrire des implosions (formation d'étoiles, implosion du coeur de supernovae de type II et tout phénomène de clustering en général) et/ou des expansions (explosion de supernovae de type I ou II).

2. Le modèle

L'étude des supernovae nécessite la résolution des équations de l'hydrodynamique gravitationnelle (équation d'Euler, équation de Poisson, équation de continuité et équation d'état polytropique) écrites en géométrie sphérique [2–4] :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 g) = -4\pi \rho G \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0 \quad (4)$$

$$p = K \rho^{\gamma'} \quad (5)$$

où γ' et K sont respectivement la constante polytropique et un coefficient constant dans l'espace et le temps. La constante universelle de la gravitation est notée G . Remarquons que γ' est différent du coefficient γ défini par le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants. En effet, on a $\gamma' = (C_p - c)/(C_v - c)$ où $c = dQ/dT$ est la chaleur spécifique.

Les variables v, p, g et ρ représentent respectivement la vitesse, la pression, l'accélération gravitationnelle et la densité. Ces quatre équations régissent la dynamique de l'étoile. Il faut leur ajouter deux équations (équation de l'énergie totale et théorème du viriel) pour pouvoir étudier l'aspect énergétique complet [3,5,6] :

$$E = E_c^M + U + W \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2[E_c^M + E_c^m] + W - 3P_{\text{ext}} V \quad (7)$$

où E_c^M , E_c^m , W , P_{ext} , I et V sont respectivement l'énergie cinétique macroscopique, l'énergie cinétique microscopique, l'énergie gravitationnelle, la pression extérieure supposée uniforme sur la surface de l'étoile (mais variable en temps), le moment d'inertie de l'étoile par rapport à son centre et son volume.

3. La transformation de redimensionnement appliquée à l'étude d'un polytrope homogène d'indice γ' quelconque

Les équations (non linéaires) du modèle contiennent des dérivées partielles par rapport aux variables d'espace r et de temps t . L'application d'une transformation dite de redimensionnement (cette transformation est générale et n'implique aucune hypothèse sur la structure initiale des équations du modèle) sur les équations de l'hydrodynamique permet d'obtenir des solutions auto-semblables généralisées. L'utilisation de ces solutions repose sur les données observationnelles discutées par Larson [7], Penston [8–10] et Shu [11]. Celles-ci montrent que les profils de densité, de vitesse et de pression tendent vers des formes auto-semblables. Nous allons ainsi travailler dans un espace transformé, image de l'espace physique par cette transformation. Toutes les grandeurs exprimées dans cet espace sont surmontées d'un « chapeau » pour les différencier de celles de l'espace physique initial. Par ailleurs, nous allons garder une dépendance temporelle dans le nouvel espace, tout en ayant une vitesse transformée nulle. La forme particulière de la vitesse v dans l'espace physique est telle que même si $\hat{v} = 0$, alors v est non nulle. Ainsi, nous arrivons à rendre la configuration statique dans le nouvel espace, sans perdre d'information sur le caractère dynamique de l'évolution dans l'espace physique. Ceci est réalisable par le changement de variables suivant, initialement introduit par Bouquet [2,4,12] et Blottiau [13] :

$$\rho(r, t) = (1 + \Omega t)^{-2} \hat{\rho}(\hat{r}, \hat{t}), \quad p(r, t) = (1 + \Omega t)^{-2\gamma'} \hat{p}(\hat{r}, \hat{t}) \quad (8)$$

$$g(r, t) = (1 + \Omega t)^{-\frac{4}{3}} \hat{g}(\hat{r}, \hat{t}), \quad v(r, t) = (1 + \Omega t)^{-\frac{1}{3}} [\hat{v}(\hat{r}, \hat{t}) + \frac{2}{3} \Omega \hat{r}] \quad (9)$$

où toutes les grandeurs avec $\hat{}$ sont fonctions des nouvelles variables indépendantes $\hat{r}$ et $\hat{t}$ définies par :

$$\hat{r} = r(1 + \Omega t)^{-\frac{2}{3}}, \quad \hat{t} = \Omega^{-1} \log(1 + \Omega t) \quad (10)$$

où Ω est introduit pour éviter une singularité à $t = 0$ (on verra une explication physique plus loin). Ces changements de variables sont maintenant largement utilisés [14–16].

Le nouvel espace est « accroché » à l'étoile en effondrement et/ou en expansion, et la physique qui lui est alors associée « devient » statique.

Les changements de variables (8)–(10) ne modifient que l'équation d'Euler, qui s'écrit alors :

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} = -\frac{1}{3} \Omega \hat{v} + \frac{2}{9} \Omega^2 \hat{r} + \hat{g} - e^{\frac{2}{3}(4-3\gamma')\Omega \hat{t}} \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} \quad (11)$$

Les équations (3)–(5) restent les mêmes, sauf qu'elles sont écrites avec des « chapeaux ». Elles sont invariantes [4,12,13]. Par ailleurs, le théorème du viriel exprimé en terme des nouvelles variables s'écrit quant-à lui :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \hat{I}}{d\hat{t}^2} = 2\hat{E}_c^m + \hat{W} + \hat{V}_p - 4\pi \hat{R}^3 \hat{P}_{\text{ext}} \quad (12)$$

où $\hat{V}_p$ représente le viriel associé à la seule nouvelle force non nulle, $\hat{F} = \frac{2}{9} \Omega^2 \hat{r}$. En effet, on étudie ici le cas homogène, donc $d\hat{p}/d\hat{r} = 0$ et, comme on cherche un état statique, tous les termes contenant $\hat{v}$ disparaissent. Il n'y a donc pas de terme E_c^M dans (12). Le calcul du viriel de $\hat{F}$ est rapide et donne :

$\widehat{V}_p = \int \widehat{F} \cdot \widehat{r} \, dm = \frac{2}{15} M \Omega^2 \widehat{R}^2$. Par ailleurs, l'énergie potentielle associée à ce viriel est donnée par $\widehat{E}_p = -\frac{1}{15} M \Omega^2 \widehat{R}^2$ [5].

Remarquons, à ce niveau, que l'équation du mouvement (11) se réduit alors à $\frac{2}{9} \Omega^2 \widehat{r} + \widehat{g} = 0$. Cela donne immédiatement une condition sur Ω et on trouve $\Omega^2 = \frac{3}{2} \Omega_J^2(0)$ où $\Omega_J(0)$ est la fréquence de Jeans du milieu homogène à $t = 0$. La quantité Ω est donc égale, à un facteur près, à la fréquence de Jeans.

Pour l'énergie interne U et l'énergie totale E nous introduisons les transformations :

$$U = (1 + \Omega t)^{2(1-\gamma')} \widehat{U} \quad (13)$$

$$E = (1 + \Omega t)^{-\frac{2}{3}} \widehat{E} + [(1 + \Omega t)^{2(1-\gamma')} - (1 + \Omega t)^{-2/3}] \widehat{U} \quad (14)$$

$$\widehat{E} = \widehat{U} + \widehat{W} + \frac{2}{15} M \Omega^2 \widehat{R}^2 \quad (15)$$

L'équation (13) provient immédiatement du fait que U est homogène au produit $pV \sim pr^3$. L'obtention de (14) est plus délicate. Tout d'abord, nous avons défini la quantité $\widehat{E}$ par $\widehat{E} = \widehat{U} + \widehat{W} + \widehat{V}_p$. Comme nous avons $\widehat{U}/U = (1 + \Omega t)^{2(\gamma'-1)}$, $\widehat{W}/W = (1 + \Omega t)^{2/3}$ et $\widehat{V}_p/V_p = (1 + \Omega t)^{2/3}$ (dans cette égalité, on a introduit $V_p = \frac{2}{15} M \Omega^2 R^2$ et on a utilisé le fait que $\Omega \widehat{R}$ se redimensionne comme une vitesse). L'équation (15) découle immédiatement de la mise en facteur du coefficient $(1 + \Omega t)^{-2/3}$ dans $\widehat{E}$. C'est cette définition de $\widehat{E}$ qui correspond à la bonne énergie totale dans l'espace redimensionné (bien qu'on ait le terme $\widehat{V}_p$ au lieu de $\widehat{E}_p$!) car seule cette forme conduit à la bonne énergie totale E définie par (6). On obtient alors :

$$E = \int \frac{1}{2} v^2 \, dm + (1 + \Omega t)^{2(1-\gamma')} \widehat{U} + W \quad (16)$$

$$E = (1 + \Omega t)^{2(1-\gamma')} \widehat{U} + (1 + \Omega t)^{-2/3} (\widehat{V}_p + \widehat{W}) \quad (17)$$

Finalement, l'application de la transformation inverse sur la combinaison du théorème du viriel statique (ce qui implique $d/d\hat{t} = 0$) et de l'équation de l'énergie totale fournit la relation cherchée (dans l'espace physique) :

$$E(t) = [1 - (3\gamma - 3)(1 + \Omega t)^{2(\gamma'-4/3)}] U(t) + 4\pi R(t)^3 P_{\text{ext}}(t) (1 + \Omega t)^{2(\gamma'-4/3)} \quad (18)$$

Cette relation est la forme très générale de l'énergie totale à chaque instant, puisqu'elle prend en compte une force de pression extérieure variable avec le temps et elle est valable pour toutes les valeurs du paramètre γ' . Cependant, il faut noter que l'énergie cinétique macroscopique n'y apparaît pas, bien qu'on ait un écoulement dynamique dans l'espace physique. Par ailleurs, si on pose $\Omega = 0$ (pas de transformations d'échelles) et si on suppose que $P_{\text{ext}} = 0$ et $\gamma' = 4/3$, alors on retrouve les hypothèses de Chandrasekhar et l'équation (18) se réduit alors à l'équation (1).

4. Étude d'un polytrophe d'indice $\gamma' = 4/3$ avec gradient de pression

Afin de modéliser plus correctement la physique de la supernova et en particulier celle de son coeur, nous allons prendre en compte l'existence d'un gradient de pression. Pour cela, nous allons étendre le redimensionnement utilisé précédemment. Il devient alors possible de décrire des évolutions qui ne sont plus seulement monotones (contrairement à la relation (10) entre r et $\widehat{r}$), mais dont la dynamique comporte l'une et/ou l'autre des deux phases (implosion, explosion) caractérisant les supernovae. Cependant, nous allons restreindre notre étude à un polytrophe d'indice $\gamma' = 4/3$ qui correspond à un mélange parfait photons/matière. De plus, le redimensionnement va être plus général que précédemment. Nous introduisons une fonction d'échelle $C(t)$ telle que [2] :

$$r = C(t) \widehat{r}, \quad dt = C(t)^{\frac{3}{2}} d\hat{t} \quad (19)$$

$$\rho(r, t) = C(t)^{-3} \widehat{\rho}(\widehat{r}, \hat{t}), \quad p(r, t) = C(t)^{-4} \widehat{p}(\widehat{r}, \hat{t}) \quad (20)$$

$$g(r, t) = C(t)^{-2} \widehat{g}(\widehat{r}, \hat{t}), \quad v(r, t) = C(t)^{-\frac{1}{2}} \widehat{v}(\widehat{r}, \hat{t}) + \widehat{r} \dot{C}(t) \quad (21)$$

où le point sur la fonction $C(t)$ symbolise l'opérateur d/dt .

En imposant une vitesse redimensionnée nulle, l'équation (21) fournit l'expression de la vitesse dans l'espace physique :

$$v(r, t) = r \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad (22)$$

où $C(t)$ doit vérifier :

$$C^2 \ddot{C} = k = \text{constante} \quad (23)$$

qui s'intègre analytiquement [4]. On en déduit la relation entre l'énergie cinétique macroscopique et le moment d'inertie de l'étoile par rapport à son centre :

$$E_c^M = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{C}}{C} \right)^2 I \quad (24)$$

En dérivant deux fois par rapport au temps, il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2E_c^M \left[1 + \frac{\ddot{C}}{C} \left(\frac{C}{\dot{C}} \right)^2 \right] \quad (25)$$

La combinaison des relations précédentes avec l'équation de l'énergie totale (6) (dans laquelle l'énergie associée au gradient de pression est incluse dans l'énergie interne) et le théorème du viriel (7) fournit la relation recherché :

$$E(t) = 2E_c^M \left[1 + 2 \frac{\ddot{C}}{C} \left(\frac{C}{\dot{C}} \right)^2 \right] + (4 - 3\gamma)U(t) + 3P_{\text{ext}}V(t) \quad (26)$$

Cette équation est la forme la plus élaborée généralisant la relation de Chandrasekhar $E = (4 - 3\gamma)U$. Contrairement à (18), elle contient explicitement l'énergie cinétique macroscopique. Parmi les solutions de l'équation (23), figurent des fonctions d'échelle qui décrivent une implosion et/ou une explosion des couches externes de la supernova. Ces trois solutions montrent la richesse de l'équation (26), puisque celle-ci régit l'énergie totale d'une masse gravitationnelle dont on peut choisir le mouvement en faisant varier le facteur d'échelle $C(t)$.

5. Conclusion

L'utilisation de changements de repères adéquats à permis l'obtention de relations énergétiques incorporant une dépendance temporelle. Nous avons également ajouté l'influence d'un gradient de pression et celui d'une force de pression extérieure uniforme sur la surface mais variable en temps. L'introduction d'une fonction d'échelle $C(t)$ permet enfin l'étude des différentes phases de l'explosion d'une étoile en supernova.

Références bibliographiques

- [1] Chandrasekhar S., An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover, New York, 1967.
- [2] Bouquet S., Utilisation des Groupes de Redimensionnement à des Problèmes de l'Astrophysique et de la Physique des Faisceaux de Particules, Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 1984.
- [3] Sédov L., Similitudes et Dimensions en Mécanique, Mir, Moscou, 1977.
- [4] Bouquet S., Feix M.R., Solutions des équations d'un polytrope gravitationnel par le groupe de quasi-invariance, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II 295 (1982) 993-996.
- [5] Cox D., Principles of Stellar Structure, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [6] Vauclair S., Eléments de Physique Statistique, InterEditions, Paris, 1993.

- [7] Larson R.B., Numerical calculations of the dynamics of a collapsing proto-star, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 145 (1969) 271–295.
- [8] Penston M.V., Dynamics of self-gravitating gaseous spheres, *Roy. Obs. Bull.* 117 (1965) 299–312.
- [9] Penston M.V., Dynamics of self-gravitating gaseous spheres, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 145 (1969) 457–485.
- [10] Penston M.V., Dynamics of self-gravitating gaseous spheres, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 144 (1969) 425–448.
- [11] Shu F.H., Self-similar collapse of isothermal spheres and star formation, *Astrophys. J.* 214 (1977) 488–497.
- [12] Bouquet S., Feix M.R., Fijalkow E., Munier A., Density bifurcation in a homogeneous isotropic collapsing star, *Astrophys. J.* 293 (1985) 494–503.
- [13] Blottiau P., Bouquet S., Chièze J.P., An asymptotic self-similar solution for the gravitationnal collapse, *Astronom. Astrophys.* 207 (1988) 24–36.
- [14] Chièze J.P., Teyssier R., Alimi J.M., Gas and dark matter spherical dynamics, *Astrophys. J.* 484 (1997) 40–52.
- [15] Hanawa T., Nakaymak K., Stability of similarity solutions for a gravitationnally contracting isothermal sphere: convergence to the Larson–Penston solution, *Astrophys. J.* 448 (1997) 238–244.
- [16] Saigo K., Hanawa T., Similarity solution for formation of a circumstellar disk through the collapse of a flattered rotating cloud, *Astrophys. J.* 493 (1998) 342–350.